Часть 5. Обобщенная формула стоимости.

В предыдущих главах были получены уравнение баланса

$\frac{∂C}{∂t}+ \frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙m^{2}=0$

И соотношение: $mI=hCP∙\sqrt{\frac{2∙π}{t}}$ (5.1)

для нахождения ожидаемой подвижности гипотетического центрального опциона со страйком $S=x$. Открытым остался вопрос о виде зависимости ожидаемой подвижности опциона $m\left(x\right)$ от стоимости базового актива. Рассмотрим данные наблюдений за фьючерсами и опционами SP500. На рисунке 5.1 приведены графики стоимости фьючерса SP500, его исторической дневной подвижности $ mH$ и ожидаемой подвижности $mI$ опционов, посчитанной по формуле (5.1).



На рисунке отчетливо видна отрицательная корреляция между верхним и нижним графиками. На рисунке 5.2 те же данные представлены в приращениях.



Этих рисунков достаточно для того, чтобы засомневаться в истинности учения БШ. Если бы поведение базового актива подчинялось закону GBM, то линия регрессии на левом графике имела бы положительный наклон $σ$ (волатильность процесса). Если бы поведение опционов соответствовало модели БШ, то такой же наклон имела бы линия регрессии правого графика. Для модели Башелье эти линии должны быть горизонтальными.

Пойдем по стандартному пути познания:

он наблюдения к гипотезе, от гипотезы к теории, от теории к практике

Наблюдение есть, формулируем гипотезу: $m\left(x\right)=a+b∙x$, где $a,b$ – какие-то, пока непонятные параметры. Уравнение баланса принимает вид:

$\frac{∂C}{∂t}+ \frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙\left(a+b∙x\right)^{2}=0$ (5.2)

Решим его с краевым условием (4.2). В решении делаем формальную замену переменной $a=m-b∙x$ и окончательно получаем:

$C\left(x,t,S,m,b\right)=Φ\left(y\_{1}\right)∙\frac{m}{b}-Φ\left(y\_{2}\right)∙\left(\frac{m}{b}+S-x\right)$ (5.3)

$$y\_{1,2}=\frac{ln\left[\frac{m}{m+b∙\left(S-x\right)}\right]\pm \frac{b^{2}∙t}{2}}{b∙\sqrt{t}}$$

здесь $S$ – страйк опциона, $Φ\left(∙\right)$ - интегральная функция нормального распределения.

$m$ – ожидаемая подвижность центральной точки, $b$ - коэффициент дрейфа подвижности.

*Замечание. Не стоит пугаться* $b$ *в знаменателе, при* $b\rightarrow 0$ *из (5.3) предельным переходом получается формула Башелье.*

Стоимость опциона Put получается из условия паритета стоимостей, которое справедливо всегда и вне зависимости от используемой модели:

$P\left(x,t,S,m,b\right)=-Φ\left(-y\_{1}\right)∙\frac{m}{b}+Φ\left(-y\_{2}\right)∙\left(\frac{m}{b}+S-x\right)$ (5.4)

От гипотезы мы перешли к теории, теперь проверяем теорию на практике.



На рисунке 5.5 приведены рыночные цены квартальных опционов на индекс RTS (Bid,Ask) и результат их аппроксимации формулами (5.3),(5.4). Параметр $m$ вычислялся по формуле (5.1), параметры $ b\_{c},b\_{p}$ – по отдельности для кривых Call и Put методом наименьших квадратов. Трех параметров$ \left( m, b\_{c},b\_{p}\right)$, первый из которых определяетс высоту центральной точки, а два других кривизну хвостов, достаточно для описания практически любого рынка опционов. Предложенные формулы также названы обобщенными. После соответствующих подстановок они превращаются в формулы Блэка и Башелье.

*Замечание. Мне не удалось найти рынков , цены которых откровенно не подчиняются обобщенной модели. Отличия только в коэффициенте дрейфа* $b$*. Для опционов на индексы и акции он отрицательный, для товарных опционов положительный, для опционов на равносильные валютные пары близок к нулю. Все случаи отклонения реальных цен от теоретических имеют рациональное объяснение. Так, на FORTS цены опционов с дальними страйками часто оказываются выше теоретических. Это объясняется тем, что ГО продавца дальних опционов многократно превышает ГО покупателя.*

*Формулы могут давать расходжения в случае, когда цены базового актива достигают исторических экстремумов. Сейчас это происходит с опционами SP500. Цены Call завышены в сравнении с теоретическими, потому что ожидаемой подвижности опционов* $mI$ *уже некуда падать, уйти ниже нуля она не может. Нужно либо вводить поправку в зависимость* $m=a+b∙x$*, либо ждать, когда цена SP500 отойдет от максимума.*

Специально следует рассмотреть расчет Дельты. Он чуть сложнее, чем можно предположить.

$$DeltaCall\left(x,t,S,m,b\_{c},b\_{k}\right)==Φ\left(y\_{1}\right)∙\frac{b\_{k}}{b\_{c}}+f\left(y\_{1}\right)∙\frac{m}{b\_{c}}∙z\_{1}-Φ\left(y\_{2}\right)∙\left(\frac{b\_{k}}{b\_{c}}-1\right)+f\left(y\_{2}\right)∙\left(\frac{m}{b\_{c}}+S-x\right)∙z\_{1}$$

 (5.5)

$$z\_{1}=\frac{b\_{k}∙\left(S-x\right)+m}{\left[b\_{c}∙\left(S-x\right)+m\right]∙m∙\sqrt{t}}$$

$$DeltaPut\left(x,t,S,m,b\_{p},b\_{k}\right)=DeltaCall\left(x,t,S,m,b\_{p},b\_{k}\right)-1$$

$f\left(∙\right)$ - плотность нормального распределения

Дело в том, что коэффицентов дрейфа подвижности $b$, по факту, четыре. Это $b\_{c},b\_{p}$, которые подбираются по текущим ценам опционов Call и Put (рисунок 5.3). Это $b\_{h}$- угол наклона линии регрессии приращений исторической подвижности БА $\left(mH\right)$ по приращениям БА (рисунок 5.2 слева). И это $b\_{k}$- угол наклона линии регрессии приращений ожидаемой подвижности центральной точки $\left(mI\right)$ по приращениям БА (рисунок 5.2 справа). У них разный физический смысл, поэтому и в расчете производных они учитываются по-разному.

*Замечание. Коэффициент* $b\_{k}$*, входящий в формулу для расчета Дельты, находится по историческим данным (рисунок 5.2 справа). Зная только его значения в прошлом, но не зная будущего значения, мы в принципе не можем точно посчитать дельту портфеля. В случае ошибки при длинном тренде базового актива это может привести к серьезным финансовым потерям. Поэтому лучше заранее оценить чувствительность портфеля по отношению к неточности расчета* $b\_{k}$ *, варьируя его значения при подстановке в (5.5).*

Приложение.

1. Стоимость опциона Call

$C\left(x,t,S,m,b\_{c}\right)=n\_{1}∙\frac{m}{b\_{c}}-n\_{2}∙\left(\frac{m}{b\_{c}}+S-x\right)$

$$n\_{1}=Φ\left(y\_{1}\right)$$

$n\_{2}=Φ\left(y\_{2}\right)$

$$y\_{1,2}=\frac{ln\left[\frac{m}{m+b\_{c}∙\left(S-x\right)}\right]\pm \frac{b\_{c}^{2}∙t}{2}}{b\_{c}∙\sqrt{t}}$$

1. Дельта опциона Call

$$DeltaCall\left(x,t,S,m,b\_{c},b\_{k}\right)=n\_{1}∙\frac{b\_{k}}{b\_{c}}+n\_{3}∙\frac{m}{b\_{c}}∙z\_{1}-n\_{2}∙\left(\frac{b\_{k}}{b\_{c}}-1\right)+n\_{4}∙\left(\frac{m}{b\_{c}}+S-x\right)∙z\_{1}$$

$$z\_{1}=\frac{b\_{k}∙\left(S-x\right)+m}{\left[b\_{c}∙\left(S-x\right)+m\right]∙m∙\sqrt{t}}$$

$$n\_{3}=f\left(y\_{1}\right)$$

$$n\_{4}=f\left(y\_{2}\right)$$

1. Гамма опциона Call

$$GammaCall\left(x,t,S,m,b\_{c},b\_{k}\right)=R\_{1}-R\_{2}$$

$$R\_{1}=2∙n\_{3}∙z\_{1}∙\frac{b\_{k}}{b\_{c}}-y\_{1}∙n\_{3}∙z\_{1}^{2}∙\frac{m}{b\_{c}}+n\_{3}∙z\_{2}∙\frac{m}{b\_{c}}$$

$$R\_{1}=2∙n\_{4}∙z\_{1}∙\left[\frac{b\_{k}}{b\_{c}}-1\right]-y\_{2}∙n\_{4}∙z\_{1}^{2}∙\left[\frac{m}{b\_{c}}+S-x\right]+n\_{4}∙z\_{2}∙\left[\frac{m}{b\_{c}}+S-x\right]$$

$$z\_{2}=-\frac{b\_{k}^{2}∙\left(S-x\right)-m∙b\_{c}}{\left[b\_{c}∙\left(S-x\right)+m\right]^{3}∙m^{4}∙8∙\sqrt{t}}$$

1. Тета опциона Call

$$ThetaCall\left(x,t,S,m,b\_{c}\right)=\frac{m∙n\_{3}∙c\_{1}-\left[m+\left(S-x\right)∙b\_{c}\right]∙n\_{4}∙c\_{2}}{b\_{c}}$$

$$c\_{1}=\frac{t∙b\_{c}-e∙\sqrt{2}}{4∙t∙\sqrt{t}}$$

$$c\_{2}=\frac{-t∙b\_{c}-e∙\sqrt{2}}{4∙t∙\sqrt{t}}$$

$$e=\frac{ln\left[\frac{m}{m+b\_{c}∙\left(S-x\right)}\right]∙\sqrt{2}}{b\_{c}}$$

1. Вега опциона Call

$$VegaCall\left(x,t,S,m,b\_{c}\right)=\frac{n\_{1}-n\_{2}+m∙n\_{3}∙g-\left[\left(S-x\right)∙b\_{c}+m\right]∙n\_{4}∙g}{b\_{c}}$$

$$g=\frac{s-x}{m∙\left[m+b\_{c}∙\left(S-x\right)\right]∙\sqrt{t}}$$

1. Ожидаемая подвижность опциона Call

$$mI\left(x,t,S,m,b\_{c},b\_{k}\right)=\sqrt{\frac{ThetaCall\left(x,t,S,m,b\_{c}\right)}{GammaCall\left(x,t,S,m,b\_{c},b\_{k}\right)}}$$

Приведенные формулы используются только для опционов “вне денег” – для всех страйков, лежащих левее текущей стоимости фьючерса$ x$, используется коэффициент дрейфа $b\_{p}$ подобранный по форме “хвоста” Put. Для страйков правее $x$ – коэффициент $b\_{c}$, подобранный по форме “хвоста” Call. Для опционов “в деньгах” нужно использовать формулы паритета.

В расчете дельты нужно обязательно предусмотреть процедуру сглаживания в окрестности центральной точки, иначе при переходе цены БА через страйк ($b\_{c} $заменяется $b\_{p}$ и обратно), дельта будет изменяться скачком, что недопустимо.