Часть 3. Уравнение баланса

В двух следующих главах нашей задачей будет нахождение формулы ”справедливой” стоимости опциона $C\left(x,t\right)$. Уравнение баланса, которое мы получим в этой главе, послужит ключом для понимания логики нахождения “справедливой” цены.

Мы ограничимся рассмотрением опционов простейшего типа, а именно, маржируемых опционов Call европейского типа на фьючерс. Дальше я просто покажу, как от них перейти к опционам других типов.

В качестве базового актива, как договорились, будем рассматривать фьючерс. Из спецификации опциона, в которой обязательно указывается цена Strike и дата экспирации, точно известно, какой будет зависимость стоимости опциона от стоимости фьючерса $x$ в момент экспирации T. Функция $C\_{T}\left(x\right)$ называется **терминальной функцией выплат**, ее график приведен на Рис. 3.1.

 

О самой функции $C\left(x,t\right)$ известно, что при любом $t<T$, это гладкая, выпуклая, монотонно возрастающая функция стоимости фьючерса $x$ - ее график выглядит как синяя линия на Рис. 3.2. Кроме того, при любом фиксированном $x$, $C\left(x,t\right)$ – монотонно убывающая функция времени.

Эти свойства доказываются от противного - при нарушении любого из них появится возможность построения гарантировано безубыточного портфеля, что считается невозможным.

*Замечание. Для упрощения записей я буду указывать в* $C\left(x,t\right)$ *только один аргумент в случаях, когда другой аргумент считается зафиксированным.*

**

Рассмотрим рисунок 3.2. Если стоимость фьючерса равна $x\_{0}$ , то соответствующая ей стоимость опциона равна $C\left(x\_{0}\right)$ - это точка $A\_{0}$. Если стоимость фьючерса изменится и станет равной $x\_{1}$, стоимость опциона тоже изменится и станет равной$ C\left(x\_{1}\right)$ – точка $A\_{1}$.

Функция $C\left(x\right)$ всюду гладкая, поэтому можно, во-первых провести к ней касательную в точке $A\_{0}$ с углом наклона $δ\_{0}$. И во-вторых – выразить ее значение $C\left(x\_{1}\right) $ через разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $A\_{0}$ с точностью до малых второго порядка:

$C\left(x\_{1}\right)=C\left(x\_{0}\right)+\frac{∂C}{∂x}∙\left(x\_{1}-x\_{0}\right) +\frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙\left(x\_{1}-x\_{0}\right)^{2}+ ∙∙∙$ (3.1)

*Замечание. Чтобы не запутать читателя в обозначениях, поясню, что символом* $ Π$ *я буду обозначать портфель, состоящий из опциона и фьючерсов, символом* $Π\left(x\right)$ *- график его цены,* $Π\left(x\_{0}\right)$ *– стоимость портфеля при стоимости фьючерса, равной* $x\_{0}$ *.*

Пока в нашем портфеле только один купленный опцион Call. Сформируем новый портфель так, чтобы его стоимость в наименьшей степени зависела от стоимости фьючерса. Для этого продадим фьючерс в количестве $δ\_{0}$ по текущей цене $x\_{0}$ (мы допускаем, что правилами биржи не запрещена торговля долями фьючерса, $δ\_{0}<1$). Получим так называемый дельта - нейтральный портфель, обозначим его $ Π\_{0}$.



Рассмотрим рисунок 3.3. График стоимости портфеля $Π\_{0}(x)$ получается из графика $C\left(x\right)$, изображенного на рис. 3.2 поворотом на угол $δ\_{0}$ вокруг точки $A\_{0}$.

В точке $A\_{0}$ стоимость портфеля $Π\_{0}\left(x\_{0}\right)$ в точности совпадает со стоимостью “чистого” опциона $C\left(x\_{0}\right)$ , потому что сделка с фьючерсом по цене $x\_{0}$ не создает никакой дополнительной стоимости - это пари покупателя с продавцом, по которому в момент сделки никто никому не должен.

Для нахождения стоимости $Π\_{0}\left(x\_{1}\right)$, из стоимости опциона $C\left(x\_{1}\right)$, найденной по формуле (3.1), нужно вычесть изменение стоимости фьючерсов, входящих в портфель в количестве $δ\_{0}$. Это изменение составляет $δ\_{0}∙\left(x\_{1}-x\_{0}\right) $. С учетом того, что $δ\_{0}=\frac{∂C}{∂x}$ и $ Π\_{0}\left(x\_{0}\right)=C\left(x\_{0}\right)$, получим:

$Π\_{0}\left(x\_{1}\right)=C\left(x\_{1}\right) -δ\_{0}∙\left(x\_{1}-x\_{0}\right) = Π\_{0}\left(x\_{0}\right)+\frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙\left(x\_{1}-x\_{0}\right)^{2} $ (3.2)

Функция$ C\left(x\right)$ выпуклая, значит ее вторая производная $\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}$ положительная, тогда из (3.2) следует, что $Π\_{0}\left(x\_{1}\right)>Π\_{0}\left(x\_{0}\right)$ вне зависимости от того, в каком направлении изменилась цена фьючерса. При этом портфель перестал быть дельта – нейтральным, касательная к $Π\_{0}(x)$ в точке $A\_{1}$ имеет наклон $δ\_{1}\ne 0$. Восстановим дельта – нейтральность, допродав фьючерсы в количестве $δ\_{1}$ по новой текущей цене $x\_{1}$. Обозначим новый портфель $Π\_{1}$. График его стоимости $Π\_{1}(x)$ получится из графика $Π\_{0}(x)$ поворотом вокруг точки $A\_{1}$ на угол $δ\_{1}$(штриховая линия).

Мы создали новый дельта – нейтральный портфель $Π\_{1}$ и при этом зафиксировали прибыль $Π\_{0}\left(x\_{1}\right)-Π\_{0}\left(x\_{0}\right)$. Любое следующее изменения стоимости фьючерса увеличит стоимость портфеля $Π\_{1}$.

Теперь рассмотрим интервал времени $∆T$. Предположим, что цена фьючерса изменилась на нем $n$ раз, и посчитаем, как суммарно изменится стоимость портфеля при условии, что дельта – хеджирование проводится после каждого изменения цены фьючерса:

$Π\_{n}\left(x\_{n}\right)= Π\_{0}\left(x\_{0}\right)+\frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-x\_{i-1}\right)^{2}$(3.3)

*Замечание. Здесь мы предполагаем, что рассматриваемый интервал времени и изменения цен фьючерса внутри него настолько малы, что вторую производную* $\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}$ *можно считать константой и выносить за знак суммирования. Это предположение не очень обременительное, из него следует только то, что для неликвидных рынков нужна другая теория.*

Из формул (2.1), (2.2) предыдущей главы следует, что:

$$\sum\_{i=1}^{n}\left(x\_{i}-x\_{i-1}\right)^{2}=m^{2}∙∆T$$

Где $m$ – подвижность фьючерса на интервале $∆T$. С учетом этого перепишем (3.3) в виде:

$Π\_{n}\left(x\_{n}\right)-Π\_{0}\left(x\_{0}\right)=\frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙m^{2}∙∆T$(3.4)

Чем чаще и чем сильнее будет меняться цена фьючерса, тем сильнее возрастет стоимость дельта – нейтрального портфеля - это то, за счет чего рассчитывает выиграть покупатель. Посмотрим на ситуацию глазами продавца. Он рассчитывает выиграть за счет тета – распада входящего в портфель опциона - за время $∆T $его стоимость уменьшится на $\frac{∂C}{∂t}∙∆T$. Полное приращение стоимости портфеля с учетом времени составит:

$ Π\_{n}\left(x\_{n} ,t\_{n}\right)- Π\_{0}\left(x\_{0} ,t\_{0}\right)=\frac{∂C}{∂t}∙∆T+ \frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙m^{2}∙∆T$ (3.5)

Теперь остается предположить, что если “справедливый” рынок существует, то покупатели и продавцы опционов на нем должны находиться в равных условиях и “справедливая” стоимость опциона должна установиться на уровне, при котором полное приращение стоимости портфеля станет равным нулю. Приравняем (3.5) к нулю и поделим все слагаемые на $∆T>0$, окончательно получим:

$\frac{∂C}{∂t}+ \frac{1}{2}∙\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}∙m^{2}=0$ (3.6)

Уравнение (3.6) называется уравнением баланса. Оно является важнейшим промежуточным результатом, и в следующей главе мы рассмотрим, как из него находится “справедливая” стоимость опциона.

*Замечание. Ввиду важности использованных частных производных им присвоены персональные ”греческие” имена.*

*Theta* $\frac{∂C}{∂t}$ *- первая производная стоимости опциона по времени*

*Delta* $\frac{∂C}{∂x}$ *- первая производная стоимости опциона по стоимости фьючерса*

*Gamma* $\frac{∂^{2}C}{∂x^{2}}$ *- вторая производная стоимости опциона по стоимости фьючерса*

*С учетом имен уравнение баланса можно записать в более дружелюбном виде:*

$$Theta+ \frac{1}{2}∙Gamma∙m^{2}=0$$