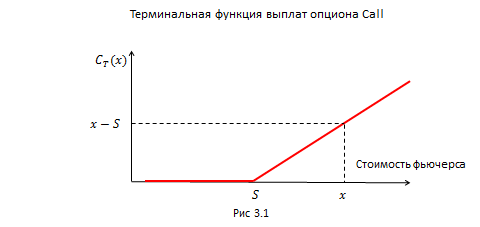
Часть 3. Уравнение баланса

В двух следующих главах нашей задачей будет нахождение формулы ”справедливой” стоимости опциона . Уравнение баланса, которое мы получим в этой главе, послужит ключом для понимания логики нахождения “справедливой” цены.

Мы ограничимся рассмотрением опционов простейшего типа, а именно, маржируемых опционов Call европейского типа на фьючерс. Дальше я просто покажу, как от них перейти к опционам других типов.

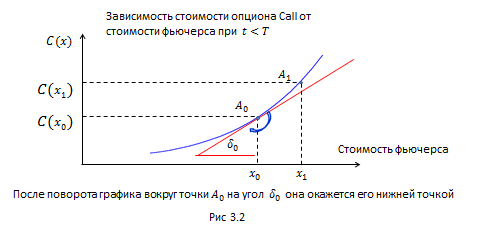
В качестве базового актива, как договорились, будем рассматривать фьючерс. Из спецификации опциона, в которой обязательно указывается цена Strike и дата экспирации, точно известно, какой будет зависимость стоимости опциона от стоимости фьючерса в момент экспирации T. Функция называется **терминальной функцией выплат**, ее график приведен на Рис. 3.1.



О самой функции известно, что при любом , это гладкая, выпуклая, монотонно возрастающая функция стоимости фьючерса - ее график выглядит как синяя линия на Рис. 3.2. Кроме того, при любом фиксированном , – монотонно убывающая функция времени.

Эти свойства доказываются от противного - при нарушении любого из них появится возможность построения гарантировано безубыточного портфеля, что считается невозможным.

*Замечание. Для упрощения записей я буду указывать в только один аргумент в случаях, когда другой аргумент считается зафиксированным.*

**

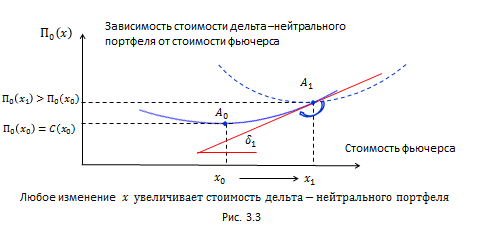
Рассмотрим рисунок 3.2. Если стоимость фьючерса равна , то соответствующая ей стоимость опциона равна - это точка . Если стоимость фьючерса изменится и станет равной , стоимость опциона тоже изменится и станет равной – точка .

Функция всюду гладкая, поэтому можно, во-первых провести к ней касательную в точке с углом наклона . И во-вторых – выразить ее значение через разложение в ряд Тейлора в окрестности точки с точностью до малых второго порядка:

(3.1)

*Замечание. Чтобы не запутать читателя в обозначениях, поясню, что символом я буду обозначать портфель, состоящий из опциона и фьючерсов, символом - график его цены, – стоимость портфеля при стоимости фьючерса, равной .*

Пока в нашем портфеле только один купленный опцион Call. Сформируем новый портфель так, чтобы его стоимость в наименьшей степени зависела от стоимости фьючерса. Для этого продадим фьючерс в количестве по текущей цене (мы допускаем, что правилами биржи не запрещена торговля долями фьючерса, ). Получим так называемый дельта - нейтральный портфель, обозначим его .



Рассмотрим рисунок 3.3. График стоимости портфеля получается из графика , изображенного на рис. 3.2 поворотом на угол вокруг точки .

В точке стоимость портфеля в точности совпадает со стоимостью “чистого” опциона , потому что сделка с фьючерсом по цене не создает никакой дополнительной стоимости - это пари покупателя с продавцом, по которому в момент сделки никто никому не должен.

Для нахождения стоимости , из стоимости опциона , найденной по формуле (3.1), нужно вычесть изменение стоимости фьючерсов, входящих в портфель в количестве . Это изменение составляет . С учетом того, что и , получим:

(3.2)

Функция выпуклая, значит ее вторая производная положительная, тогда из (3.2) следует, что вне зависимости от того, в каком направлении изменилась цена фьючерса. При этом портфель перестал быть дельта – нейтральным, касательная к в точке имеет наклон . Восстановим дельта – нейтральность, допродав фьючерсы в количестве по новой текущей цене . Обозначим новый портфель . График его стоимости получится из графика поворотом вокруг точки на угол (штриховая линия).

Мы создали новый дельта – нейтральный портфель и при этом зафиксировали прибыль . Любое следующее изменения стоимости фьючерса увеличит стоимость портфеля .

Теперь рассмотрим интервал времени . Предположим, что цена фьючерса изменилась на нем раз, и посчитаем, как суммарно изменится стоимость портфеля при условии, что дельта – хеджирование проводится после каждого изменения цены фьючерса:

(3.3)

*Замечание. Здесь мы предполагаем, что рассматриваемый интервал времени и изменения цен фьючерса внутри него настолько малы, что вторую производную можно считать константой и выносить за знак суммирования. Это предположение не очень обременительное, из него следует только то, что для неликвидных рынков нужна другая теория.*

Из формул (2.1), (2.2) предыдущей главы следует, что:

Где – подвижность фьючерса на интервале . С учетом этого перепишем (3.3) в виде:

(3.4)

Чем чаще и чем сильнее будет меняться цена фьючерса, тем сильнее возрастет стоимость дельта – нейтрального портфеля - это то, за счет чего рассчитывает выиграть покупатель. Посмотрим на ситуацию глазами продавца. Он рассчитывает выиграть за счет тета – распада входящего в портфель опциона - за время его стоимость уменьшится на . Полное приращение стоимости портфеля с учетом времени составит:

(3.5)

Теперь остается предположить, что если “справедливый” рынок существует, то покупатели и продавцы опционов на нем должны находиться в равных условиях и “справедливая” стоимость опциона должна установиться на уровне, при котором полное приращение стоимости портфеля станет равным нулю. Приравняем (3.5) к нулю и поделим все слагаемые на , окончательно получим:

(3.6)

Уравнение (3.6) называется уравнением баланса. Оно является важнейшим промежуточным результатом, и в следующей главе мы рассмотрим, как из него находится “справедливая” стоимость опциона.

*Замечание. Ввиду важности использованных частных производных им присвоены персональные ”греческие” имена.*

*Theta - первая производная стоимости опциона по времени*

*Delta - первая производная стоимости опциона по стоимости фьючерса*

*Gamma - вторая производная стоимости опциона по стоимости фьючерса*

*С учетом имен уравнение баланса можно записать в более дружелюбном виде:*